AnW Woche 6

28.03.24
Nicolas Wehrli

Heute:

I. Minitest
II. Kurze Kommentare zur Serie
III. Theory Recap
- Erwartungswert
- Indikatorvariablen
- Bernoulliverteilung, Binomialverteilung
- Geometrische Verteilung
- Negative Binomialverteilung
- Coupon Collector
- Bedingte Zufallsvariablen, Mehrere Zufallsvariablen
- Varianz
- Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

IV. Programmieren – Dynamic Programming with Probability

I. Minitest

Passwort: harmony

Feedback?

Seien A, B, C unabhängige Ereignisse. Welche der folgenden Gleichungen sind immer wahr?

Richtig	Falsch		
◉ ☑	○ ✗	$\Pr[A \mid B \cap C] = \Pr[A \mid B \cup C]$	✓
○ ✗	◉ ☑	$\Pr[(A \cup B) \cap C] = (\Pr[A] + \Pr[B]) \cdot \Pr[C]$	✓
○ ✗	◉ ☑	$\Pr[A] + \Pr[B] \leq \Pr[A \cup B]$	✓
◉ ☑	○ ✗	$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$	✓

1. Unabhängigkeit von A und $B \cap C$ (bzw. $B \cup C$)
2. $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ $\Big\}$ $\Pr[A \cap B] > 0$?
3. " "
4. Definition:

$$A, B \text{ unabhängig} \iff \Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$$

Lemma 2.24. Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Betrachten Sie das Coupon-Collector-Problem mit nur zwei verschiedenen Coupons ($n = 2$). Die erwartete Anzahl Runden bis wir beide Coupons gesammelt haben ist 3.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr ☒
- Falsch ○

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \implies 2 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{3}}$$

Seien $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ und $X_2 \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ zwei unabhängige binomielle Zufallsvariablen. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

Wählen Sie eine Antwort:

a.
$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(n, 2p)$.

b.
$X_1 + X_2$ ist nicht notwendigerweise Binomialverteilt.

c.
$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(2n, 2p)$.

d.
$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(2n, p)$.

e.
$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Sei $Z := X_1 + X_2$

$$\Pr[Z=k] = \sum_{i=0}^{n} \Pr[X_1=i, X_2=k-i] = \sum_{i=0}^{n} \Pr[X_1=i]\cdot \Pr[X_2=k-i]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \cdot \binom{n}{k-i} \cdot p^{k-i} \cdot (1-p)^{n-(k-i)}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i}} \cdot p^k \cdot (1-p)^{2n-k}$$

$$= \binom{2n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{2n-k}$$ (Vandermonde's Identity)

Einfacher:

Zur Erinnerung: $X \sim \mathrm{Bin}(n,p) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\underset{\text{unabhängig}}{X_i \sim \mathrm{Ber}(p)}$

$\Rightarrow X_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $X_2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ $\quad Y_i, Z_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ und unabhängig da X_1 und X_2 unabhängig

$\Rightarrow X_1 + X_2 = \sum_{i=1}^{2n} C_i$ $\quad C_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ und unabhängig

$$X_1 + X_2 \sim Bin(2n, p)$$

Sei $\Omega = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$ ein Laplaceraum und sei ω ein (zufälliges) Elementarereignis in Ω. Berechnen Sie $\mathbb{E}[|\omega|]$.

Answer:

$$\sum_{w \in \Omega} |w| \cdot Pr[w] = 0 + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = \underline{\underline{2}}$$

Wir werfen einen fairen, sechsseitigen Würfel 4 mal. Sei X die Summe der Augen der vier Würfe, dann ist X binomial verteilt.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

Wahr

Falsch ☒

Binomialverteilung modelliert ein Zufallsexperiment wo ein Prozess mit Erfolgsw'keit p n-mal wiederholt wird.

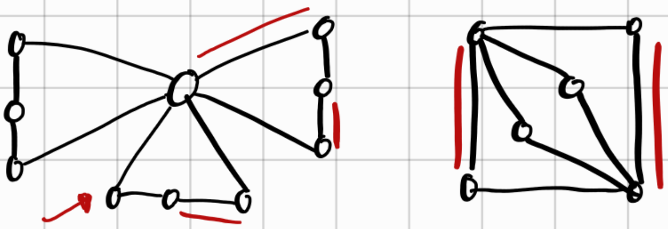
Angenommen, G ist ein Graph, der eine Eulertour enthält, und die Anzahl Knoten von G ist gerade. Dann enthält G ein perfektes Matching.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

Wahr

Falsch ☒

Gegenbeispiel:



Wir betrachten folgendes Zufallsexperiment: Wir werfen zunächst einen 6-seitigen Würfel und danach eine Münze. Dieses Zufallsexperiment lässt sich mit der Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, K, Z\}$ beschreiben.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

○ Wahr

◉ Falsch

$1 \in \Omega$

Was ist 1 für ein Elementarereignis?

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{K, Z\}$

Drei Ereignisse A, B, C heissen unabhängig genau dann wenn $Pr[A \cap B \cap C] = Pr[A] \cdot Pr[B] \cdot Pr[C]$.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

Wahr ○

Falsch ☒

Definition 2.22. Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}]. \tag{2.2}$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn (2.2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Alle Teilmengen! $\Rightarrow$ $Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$
$Pr[B \cap C] = Pr[B] \cdot Pr[C]$
$Pr[C \cap A] = Pr[C] \cdot Pr[A]$
muss auch gelten!

Wir betrachten den Laplaceraum mit $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Seien $A = \{2, 3, 5, 7\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse passieren?

Answer:

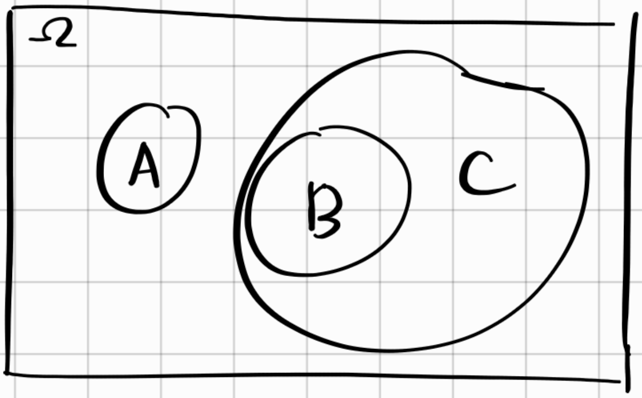
$A \cap B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow Pr[A \cap B] = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3}{10} = 0.3$

Seien A, B, C drei Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum mit $Pr[A], Pr[B], Pr[C] > \mathbf{0}$.

Wahr	Falsch		
✓		Falls A, B, C unabhängig sind, dann gilt $Pr[A \cap (B \cup C)] = Pr[A] \cdot Pr[B \cup C]$.	✓
	✓	Falls $Pr[A] \leq Pr[B]$, dann $Pr[A \cup C] \leq Pr[B \cup C]$.	✓
✓		Falls $Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$, dann $Pr[A \cap B] = \mathbf{0}$.	✓
✓		Falls $\Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$, dann sind A und B unabhängig.	✓

schon oben besprochen

2. Intuitiv:



$Pr[A] > 0$

3. Folgt aus $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B]$

4. Def. von Unabhängigkeit für 2 Ereignisse

Sie nehmen an einer Quizshow mit ‘Ja/Nein’-Fragen teil und wissen, dass die Fragen zufällig ausgewählt werden und Sie mit Wahrscheinlichkeit p die Antwort wissen (und die Frage korrekt beantworten). Falls Sie die Antwort nicht wissen, wählen Sie eine der Antworten (uniform) zufällig aus. Wie hoch (in Abhängigkeit von p) ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die korrekte Antwort auf eine zufällige Quizfrage geben?

Wählen Sie eine Antwort:

a. p

b. $1 - p/2$

c.
$1/2$

d.
$p + (1 - p)/2$

$$\underbrace{p \cdot 1}_{\text{Ich weiss die Antwort}} + \underbrace{(1-p) \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Ich rate}} = p + (1-p)/2$$

II. Kurze Kommentare zur letzten Serie

- Rückführung zum ursprünglichen Problem fehlt.

$$\begin{tikzcd}
\text{Problem} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, shift right] & \text{Lösung} \arrow[d, shift right] \\
\text{Modellierung} \arrow[u, shift right] \arrow[r, "\text{Satz bla bla}"'] & \text{Perfektes Matching} \arrow[u, shift right, "\text{fehlt}"']
\end{tikzcd}$$

- Graphen formeller modellieren, um präziser zu sein.
  Anstatt "wir erstellen Kartenknoten für jede …."

  Sei $G = (A \uplus B, E)$ ein bipartiter Graph mit
  $A = \{6, 7, \dots, \text{König}, \text{Ass}\}$
  $B = \{S_1, S_2, \dots, S_9\}$

  und $E = \{\{u,v\} \mid u \in A, v \in B, v \text{ enthält eine Karte mit Wert } u\}$

- Wenn ihr einen Multigraph bildet: Vorsicht!

  Viele Sätze, Korollare und Algorithmen wurden nur für simple Graphen gezeigt.
  Ihr müsstet dann meist explizit zeigen, dass es auch für Multigraphen funktioniert.

III. Theory Recap – Erwartungswert

Wir möchten meistens einen "Durchschnittswert" finden, den eine Zufallsvariable annimmt.

Definition 2.27. Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} \boxed{x} \cdot \underbrace{\Pr[X = x]}_{\text{W'keit, das } x \text{ eintritt}},$$

sofern die Summe absolut konvergiert. Ansonsten sagen wir, dass der Erwartungswert undefiniert ist.

Wir erinnern uns, dass '$X=x$' nur ein Platzhalter für die Ereignismenge

$$E_x = \{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \}$$ ist.

$\Rightarrow \Pr[X=x] = \sum_{\omega \in E_x} \Pr[\omega]$ per Def. von $\Pr[\cdot]$ für Mengen

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_x} \sum_{\omega \in E_x} x \cdot \Pr[\omega]$$

$$= \sum_{x \in W_x} \sum_{\omega \in E_x} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$

Da $\bigcup_{x \in W_x} E_x = \Omega$ und $E_x \cap E_y = \emptyset$ für $x \neq y \in W_x$

Lemma 2.29. Ist X eine Zufallsvariable, so gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega].$$

Beispiel: Für unsere ZV Y mit $\Omega = \{K, Z\}^3$ und Münzwurf fair, gilt:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \Pr[Y=0] + 1 \cdot \Pr[Y=1] + 4 \cdot \Pr[Y=4] + 9 \cdot \Pr[Y=9]$$

$$= 0 + 1 \cdot \Pr[\{(K,Z,Z),(Z,K,Z),(Z,Z,K)\}]$$

$$+ 4 \cdot \Pr[\{(K,K,Z),(K,Z,K),(Z,K,K)\}]$$

$$+ 9 \cdot \Pr[\{(K,K,K)\}]$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = \underline{\underline{3}}$$

Für Zufallsvariablen X, die nur auf $\mathbb{N}_0$ abbilden, gilt:

$X : \Omega \to \mathbb{N}_0$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X=x] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X=i]} \quad (1)$$

da $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$.

Es folgt auch

Satz 2.30. Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt

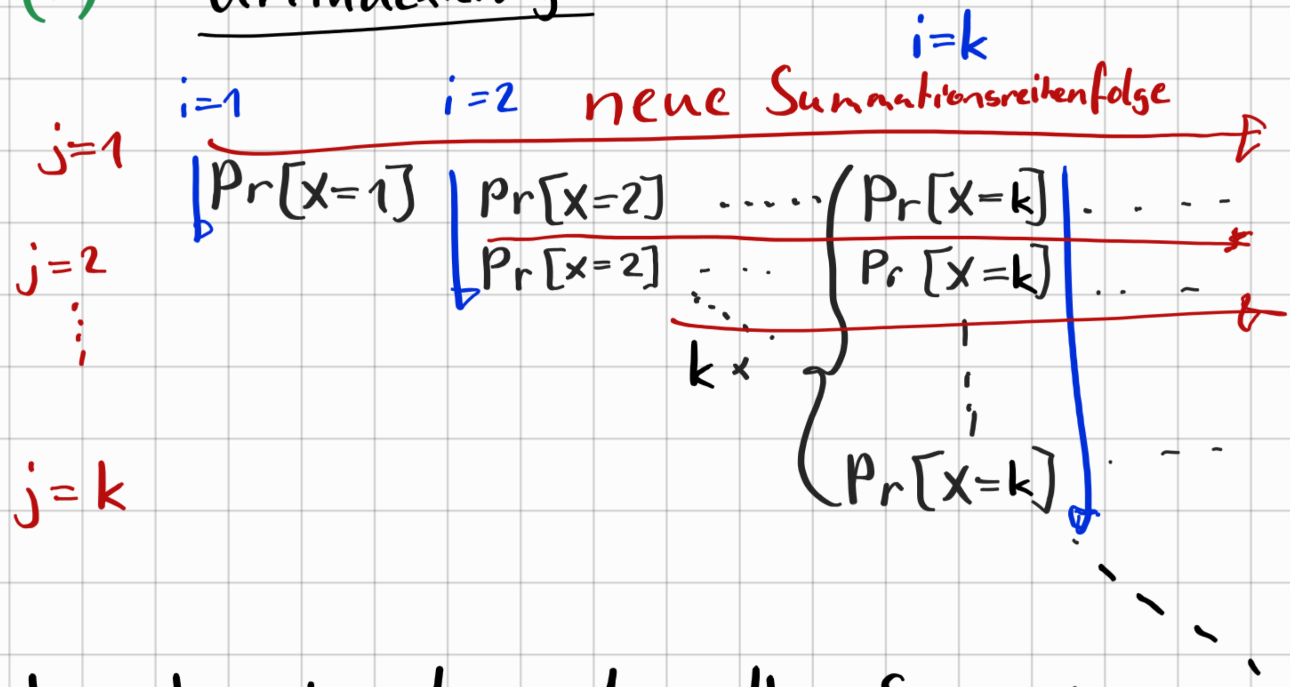
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i].$$

<u>Beweis:</u> Per (1)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X=i] = \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \Pr[X=i]}$$

$$\overset{(*)}{=} \boxed{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \Pr[X=i]} = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j] \qquad \square$$

(*): Umindexierung:



Man bemerke, dass da alle Summanden ≥ 0 sind, die Summe absolut konvergent ist.

$\Rightarrow$ Diese Umordnung verändert demzufolge das Resultat nicht.

Linearität des Erwartungswertes

Nun kommt der wichtigste Grund, warum wir meist lieber mit einer Summe von simpleren Zufallsvariablen rechnen, als mit einer einzigen komplexeren Zufallsvariable.

Satz 2.33. *(Linearität des Erwartungswerts)* Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + b$ mit $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n\mathbb{E}[X_n] + b.$$

Beweis: Per Lemma 2.29 (siehe oben)

folgt: $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr[\omega]$

Da $X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} \left(a_1 X_1(\omega) + \ldots + a_n X_n(\omega) + b\right) \cdot Pr[\omega]$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} a_1 X_1(\omega) Pr[\omega] + \ldots + \sum_{\omega \in \Omega} a_n X_n(\omega) Pr[\omega] + \sum_{\omega \in \Omega} b \, Pr[\omega]$$

$$= a_1 \cdot \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n] + b \cdot 1$$

$\boxtimes$

Die Linearität gilt in jedem Fall. Ob $X_1, \ldots, X_n$ abhängig oder unabhängig sind, spielt keine Rolle!

Deswegen ist diese Eigenschaft so interessant!

Indikatorvariablen

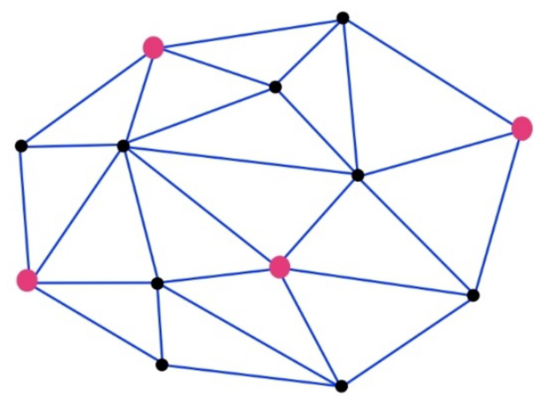
Beobachtung 2.35. Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist die zugehörige *Indikatorvariable* X_A definiert durch:

$$X_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert von X_A gilt: $\mathbb{E}[X_A] = \Pr[A]$.

Eine kompliziertere Zufallsvariable als Summe von mehreren einfacheren Indikatorvariablen darzustellen, lässt komplexe Probleme plötzlich einfach erscheinen.

Beispiel: Stabile Mengen



stabile Menge ≙ Knoten, die nicht durch Kanten verbunden sind

Formal:

$S \subseteq V$ ist stabil

$\Leftrightarrow$

$G[S]$ enthält keine Kanten

Randomisierter Algorithmus mit 2 Schritten.

1. Für jeden Knoten $v \in V$, fügen wir ihn mit Wahrscheinlichkeit p zu S hinzu.

2. Für alle Kanten noch in $G[S]$ entfernen wir einen der beiden Knoten aus S.

Sei $X_v =$ "$v \in S$ nach dem 1. Schritt" eine Indikatorvariable für alle $v \in V$ und $X = \sum_{v \in V} X_v$. ($X =$ "Knoten in S nach 1. Schritt")

Für eine beliebige Kante $e = \{u, v\} \in E$, definieren wir eine Indikatorvariable

$$Y_e = \begin{cases} 1 & \text{if } X_u = X_v = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Sei also $Y = \sum_{e \in E} Y_e$ die Anzahl Kanten in $G[S]$ nach dem 1. Schritt.

Sei $T =$ "Anzahl Knoten in S nach beiden Schritten".

$$T \geq X - Y \implies \mathbb{E}[T] \geq \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{v\in V} \mathbb{E}[X_v] = \sum_{v\in V} p = n\cdot p$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{e\in E} \mathbb{E}[Y_e] = \sum_{e\in E} p^2 = m\cdot p^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S] \geq f(p) := np - mp^2$$

$$f'(p) = n - 2mp$$

$$f'(p) = 0 \text{ für } p = \frac{n}{2m}$$

Da $f''(p) = -2m < 0$ hat $f(p)$ ein Maximum für $\underline{\underline{p = \frac{n}{2m}}}$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S] \geq \frac{n^2}{2m} - \frac{\cancel{m}\, n^2}{4m^{\cancel{2}}} = \frac{2n^2 - n^2}{4m} = \underline{\underline{\frac{n^2}{4m}}}$$

$$\left(\text{für } p = \frac{n}{2m}\right)$$

Wenn G d-regulär $\left(m = n\cdot\frac{d}{2}\right)$

$$\mathbb{E}[S] \geq \frac{n^2}{4\cdot n\cdot\frac{d}{2}} = \frac{n}{2d}$$

Bemerkung: $Var[X \cdot Y] \neq Var[X] \cdot Var[Y]$ im Allg.

Verteilungen

Zur Erinnerung: Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$:

Dichtefunktion: $f_X(k) = Pr[X = k]$

Verteilungsfunktion: $F_X(k) = Pr[X \leq k]$

$\boxed{X \sim \text{Bernoulli}(p)}$

$$f_X(k) = \begin{cases} p & \text{für } k=1 \\ 1-p & \text{für } k=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$Pr[X = 1] = p$

$Pr[X = 0] = 1-p$

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$Var[X] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
$$= (1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p)) - p^2$$
$$= p - p^2 = p(1-p)$$

Intuition: Eine binomialverteilte Zufallsvariable ist eine Summe von n unabhängigen bernoulliverteilten Zufallsvariablen mit gleicher W'keit p.

$$\boxed{X \sim Bin(n,p)} \sim \sum_{i=1}^{n} Ber(p)$$

$$f_X(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} & 0 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{N}_0 \quad Pr[X=k] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underbrace{Pr[X=k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{0 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{N}_0}$$

(Note that $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit $X_i \sim Ber(p)$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$)

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = np$$

per Linearität des Erwartungswertes.

X_i unabhängig

$$Var[X] = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p)$$

$$\boxed{X \sim Po(\lambda)}$$

$$f_X(i) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} & \text{für } i \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad Pr[X=i]$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in W_X} x \, Pr[X=x]$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \, Pr[X=i]$$

$\mathbb{E}[X] = \lambda$

↓

Herleitung

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \underbrace{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}}_{Pr[X=i]} \qquad (\text{da } W_X \subseteq \mathbb{N}_0)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}$$
$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}$$
$$= \underline{\underline{\lambda}}$$

Potenzreihenentwicklung von e^x. Siehe Analysis.

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - \lambda^2$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \, Pr[X=i] - \lambda^2 \qquad (\text{da } W_X \subseteq \mathbb{N}_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda \cdot i\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} + \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} - \lambda^2$$

$$= \lambda \cdot \underline{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}} + \underline{\lambda} e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}} - \lambda^2$$

$$= \lambda \cdot \mathbb{E}(X) + \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} - \lambda^2$$ Potenzreihenentw. v e^{λ}

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \longrightarrow \mathrm{Po}(\lambda)$$

für $n \to \infty$

$$\boxed{X \sim \mathrm{Geo}(p)}$$

Intuition: Wir versuchen etwas mit Erfolgswahrscheinlichkeit p so lange bis wir Erfolg haben.

$$f_X(i) = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & \text{für } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \Pr[X=i]$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X=i] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr[X=i]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p \cdot (1-p)^{i-1} = p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p}\left(-(1-p)^i\right)$$

$$= (-p) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i\right) = (-p) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$= (-p) \cdot \left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

Alternatively: $$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \overbrace{p \cdot (1-p)^{i-1}}^{\Pr[X=i]} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot p \cdot (1-p)^i$$

$$= \underline{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p \cdot (1-p)^i} + \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}$$

$$= (1-p) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p \cdot (1-p)^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X=i]$$

$$= (1-p)\,\mathbb{E}[X] + 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] - (1-p)\mathbb{E}[X] = 1$$

$$\Rightarrow \qquad p\,\mathbb{E}[X] = 1$$

$$\underline{\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}}$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot p \cdot (1-p)^{i-1} - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} (i+1)i\,(1-p)^{i-1} - i\,(1-p)^{i-1} \right) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta^2}{\delta p^2}\left((1-p)^{i+1}\right) + \frac{\delta}{\delta p}\left((1-p)^{i}\right)\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i+1}\right) + \frac{\delta}{\delta p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i}\right)\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2}\left(\sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i+2}\right) + \frac{\delta}{\delta p}\left(\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i+1}\right)\right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= p \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2} (1-p)^2 \cdot \frac{1}{p} + \frac{\delta}{\delta p} (1-p) \cdot \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= p \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2}\left(\frac{1-2p+p^2}{p}\right) + \frac{\delta}{\delta p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= p \left(\frac{2}{p^3} - 0 + 0 - \frac{1}{p^2} - 0 \right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

Satz 2.45. Ist $X \sim \text{Geo}(p)$, so gilt für alle $s, t \in \mathbb{N}$:

$$\Pr[X \geq s + t \mid X > s] = \Pr[X \geq t].$$

Noch von letzter Woche:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in W_X} x^2 \Pr[X=x] \qquad \text{(aus dem Kahoot)}$$

Weshalb gilt dies?

Sei $f: W_X \to \mathbb{R}$ und W_X abzählbar.

$$\boxed{\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x \in W_X} f(x) \cdot \Pr[X=x]}$$

<u>Beweis:</u> Sei $Y := f(X)$.

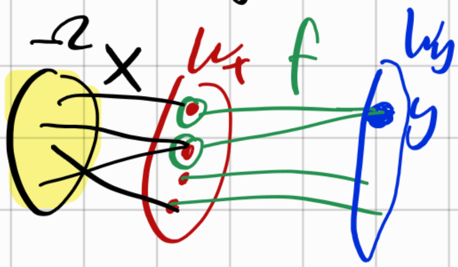
$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y=y]$$

$$= \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[f(X)=y]$$

Wir betrachten die Menge '$f(X)=y$'

$$'f(X)=y' = \{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) = y\}$$

Wir können diese Menge in eine paarweise disjunkte Vereinigung von Mengen aufteilen.



$$'f(X)=y' = \bigcup_{\substack{x \in W_X \\ f(x)=y}} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

$$\Rightarrow \quad = \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr\Big[\bigcup_{\substack{x \in W_X \\ f(x)=y}} 'X=x'\Big]$$

$$= \sum_{y \in W_y} y \cdot \left(\sum_{\substack{x \in W_x \\ f(x)=y}} \Pr[X=x] \right) \qquad \text{(Additionsatz)}$$

$$= \sum_{y \in W_y} \sum_{\substack{x \in W_x \\ f(x)=y}} f(x) \Pr[X=x]$$

$$= \sum_{x \in W_x} f(x) \cdot \Pr[X=x] \qquad \boxtimes$$

Die Kahootfrage können wir mit $f(x) = x^2$ beantworten.

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

Satz 2.45. Ist $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, so gilt für alle $s, t \in \mathbb{N}$:

$$\Pr[X \geq s + t \mid X > s] = \Pr[X \geq t].$$

Whatsapp Frage:

$$\sum_{x \in W_x} x \cdot \sum_{i=1}^{n} \Pr[X=x \mid A_i] \cdot \Pr[A_i] = \sum_{x \in W_x} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x \cdot \Pr[X=x \mid A_i] \Pr[A_i]}_{c_{i,x}}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in W_x} x \cdot \Pr[X=x \mid A_i] \cdot \Pr[A_i] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] \cdot \sum_{x \in W_x} x \cdot \Pr[X=x \mid A_i]$$

(*)

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1. & 2. & 3. & & \\
\hline
 & c_{1,x_1} & c_{1,x_2} & c_{1,x_3} & \cdots & 1. \\
 & c_{2,x_1} & \vdots & \vdots & & 2. \\
 & c_{3,x_1} & \vdots & \vdots & & 3. \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & c_{n,x_1} & c_{n,x_2} & c_{n,x_3} & &
\end{array}$$

alte Summationsreihenfolge

Neue Summationsreihenfolge

Negative Binomialverteilung

Intuition: Sowie $Bin(n,p) \approx \sum_{i=1}^{n} Ber(p)$

entspricht die negative Binomialverteilung mit Parametern n und p der Summe $\sum_{i=1}^{n} Geo(p)$

"Warten auf den n-ten Erfolg." unabhängige!

Wobei hier die Erfolgsw'keit sich nicht verändert. (Im Gegensatz zu Coupon Collector)

Sei $X \sim \text{negativBinomial}(n,p)$

$$f_X(k) = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} \cdot (1-p)^{k-n} \cdot p^n & \text{für } k = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weshalb $\binom{k-1}{n-1}$?

Wir warten auf den n-ten Erfolg. Also ist der Zeitpunkt des n-ten Erfolgs fixiert (an k-ter Stelle).

$\Longrightarrow$ Von den vorherigen $(k-1)$ Stellen waren $(n-1)$ Erfolge.

$\Longrightarrow \binom{k-1}{n-1}$ mögliche Anordnungen.

$\mathbb{E}[X] = \frac{n}{p}$ ⟵ per Linearität des Erwartungswertes: $X_i \sim Geo(p)$ n-mal Geometrische Verteilung

$$Var(X) \overset{\text{unabhängig}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \cdot \frac{(1-p)}{p^2}$$

Coupon Collector

Szenario: es gibt n verschiedene Bilder
in jeder Runde erhalten wir (gleichw'lich) eines der Bilder

X := Anzahl Runden bis wir alle n Bilder besitzen

Frage: E[X] = ??

Lösungsansatz: Zerlegen in eine Summe (kleinere Teilprobleme)

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, X_i = "Anzahl Runden nach dem (i-1)-ten Bild um das i-te Bild zu erhalten"

$$X_i \sim Geo\left(\frac{n-(i-1)}{n}\right)$$

Per Erwartungswert von $Geo(p)$:

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{n-i+1}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1}$$

$$= n \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-3} + \dots + 1\right)$$

$$= n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n H_n$$

$$\left(H_n = \ln n + O(1)\right)$$

- Bekommen wir die **ersten k** Bilder geschenkt, so reduziert sich der Erwartungswert auf

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \cdot \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i} = n \cdot H_{n-k}$$

besser

- Bekommen wir die **letzten k** Bilder geschenkt, so reduziert sich der Erwartungswert auf

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n-k} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{n}{n-i+1} = n \cdot \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot (H_n - H_k)$$

Bedingte Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Sei $A \subseteq \Omega$.

Die bedingte Zufallsvariable $X|A$ ist *dieselbe Funktion* wie X, aber der Definitionsbereich ist auf die Menge A eingeschränkt:

Zufallsvariable: $X|A : A \to \mathbb{R}$

Dichtefunktion

$$f_{X|A} : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x \mid A]$$

X ist **unabhängig** von A, falls $f_{X|A} = f_X$.

Verteilungsfunktion

$$F_{X|A} : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \leq x \mid A]$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X \mid A] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x \mid A] = \frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$

Linearität des Erwartungswertes gilt immer noch.

Mehrere Zufallsvariablen

Haben wir schon oft verwendet als Summe $X = \sum X_i$.

Wir betrachten nun oft die Wahrscheinlichkeit der Form:

$$\Pr[X = x, Y = y] \quad = \quad \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}].$$

Dazu definieren wir auch die gemeinsame Dichte:

$$f_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

Man bemerke $'X = x, Y = y' = 'X = x' \cap 'Y = y'$.

Da $\bigcup_{y \in W_Y} 'Y = y' = \Omega$ eine disjunkte Vereinigung

ist, folgt per Additionssatz:

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y)$$

"Randdichte von X" = "Dichte von X"

Unabhängigkeit von mehrere ZV:

Definition (Version 2) Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ heissen unabhängig genau dann, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n].$$

Varianz

Wir wollen ein Mass um die Nähe der Verteilung zum Erwartungswert zu quantifizieren.

Wir nehmen dafür den Erwartungswert der 'Distanz' von X zum $\mathbb{E}[X]$.

Definition 2.39. Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die *Varianz* $\mathrm{Var}[X]$ durch

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[\underbrace{(X - \mu)^2}_{f(x)}] = \sum_{x \in W_X} \underbrace{(x - \mu)^2}_{f(x)} \cdot \Pr[X = x].$$

Die Grösse $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ heisst *Standardabweichung* von X.

$(X-\mu)^2$ anstatt $|X-\mu|$ da es mathematisch mehr Sinn (stetig differenzierbar, etc.)

Satz 2.40. Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

<u>Beweis:</u> $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$

$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[-2\mu X] + \mathbb{E}[\mu^2]$

$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\, \mathbb{E}[X] + \mu^2$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$\boxtimes$

Satz 2.41. Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X].$$

$$\mathrm{Var}[aX+b] = \mathbb{E}\left[\left(a\cdot X + b - \mathbb{E}[a\cdot X+b]\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(a\cdot X + b - a\mathbb{E}[X] - b\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(a\cdot X - a\cdot\mathbb{E}[X]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(a\cdot(X - \mathbb{E}[X])\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[a^2\cdot(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = a^2 \cdot \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]$$

$$= a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$$

$\boxtimes$

Satz 2.61. *(Multiplikativität des Erwartungswerts)* Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \sum_{x_1 \in W_{X_1}} \cdots \sum_{x_n \in W_{X_n}} x_1 \cdots x_n \cdot \Pr[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n]$$

$$(\text{Unabhängigkeit}) = \sum_{x_1 \in W_{X_1}} \cdots \sum_{x_n \in W_{X_n}} x_1 \cdots x_n \cdot \Pr[X_1 = x_1] \cdot \Pr[X_2 = x_2] \cdots \Pr[X_n = x_n]$$

$$= \sum_{x_1 \in W_{X_1}} x_1 \Pr[X_1 = x_1] \cdot \sum_{x_2 \in W_{X_2}} x_2 \Pr[X_2 = x_2] \cdots \sum_{x_n \in W_{X_n}} x_n \Pr[X_n]$$

$$= \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$$

$\boxtimes$

Satz 2.62. Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := X_1 + \ldots + X_n$ gilt
$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n].$$

Beweis: Ich zeige nur den Fall $n=2$. Sei X, Y unabhängig.

$$\mathbb{E}[(X+Y)^2] = \mathbb{E}[X^2+2XY+Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\,\mathbb{E}[X\cdot Y] + \mathbb{E}[Y^2]$$

(Unabhängigkeit) $$= \mathbb{E}[X^2] + 2\,\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2]$$

$$\mathbb{E}[X+Y]^2 = (\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X]^2 + 2\,\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$$
$$= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

$\square$

Bemerkung: $\mathrm{Var}[X\cdot Y] \neq \mathrm{Var}[X]\cdot \mathrm{Var}[Y]$ im Allg.

Was noch fehlt: Varianz von Bernoulli, Binomial und Geometrisch Verteilung (könnt ihr nun selber nachrechnen, sonst vllt. nächste Woche)

Satz 2.65 (Waldsche Identität). N und X seien zwei unabhängige Zufallsvariable, wobei für den Wertebereich von N gilt: $W_N \subseteq \mathbb{N}$. Weiter sei

$$Z := \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

wobei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X seien. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X].$$

Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

Satz 2.67. *(Ungleichung von Markov)* Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Oder äquivalent dazu $\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq 1/t$.

gilt nur weil X nicht-negativ?

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X=x] \geq \sum_{\substack{x \in W_X \\ x \geq t}} x \cdot \Pr[X=x]$$

$$\geq \sum_{\substack{x \in W_X \\ x \geq t}} t \cdot \Pr[X=x] = t \cdot \underbrace{\sum_{\substack{x \in W_X \\ x \geq t}} \Pr[X=x]}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] \geq t \cdot \Pr[X \geq t] \quad \Big| :t$$

$$\frac{\mathbb{E}[X]}{t} \geq \Pr[X \geq t]$$

kehrt nicht da $t>0$

$\square$

Satz 2.68. *(Ungleichung von Chebyshev)* Sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}$$

oder äquivalent dazu $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\mathrm{Var}[X]}] \leq 1/t^2$.

<u>Beweis:</u> $|X - \mathbb{E}[X]| \geq t \iff (X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2$

$$\Rightarrow \Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] = \Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2]$$

Da $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$ nicht-negative Werte annimmt und $t^2 > 0$ gilt per Markov:

$$\Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2] \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{t^2} = \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}$$

$\boxtimes$

Keine Zusatzbedingung!

Satz 2.70 (Chernoff-Schranken). Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ and $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$:

(i) $\Pr[X \geq (1 + \delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2 \mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,

(ii) $\Pr[X \leq (1 - \delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2 \mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,

(iii) $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2e\mathbb{E}[X]$.

individuelle W'keiten (X ist nicht ganz binomial)

Auf Beweis verzichten wir. (Skript S. 143-144)

IV. Probability DP

Kurzer Input / Struktur

In AnW braucht ihr manchmal DP um gewisse W'keiten auszurechnen.

Ihr müsst meistens die W'keit eines Endresultats für einen beliebigen iterativen Prozess finden.

Zeitliche Fortschrittskomponente:
Meistens gibt es irgendeine wiederholte Komponente.
Bsp. Anzahl Runden, Anzahl Tage, ...

Das ist dann eine Achse in eurem DP-Table.

Erfolgsbasierte Fortschrittskomponente:

Für verschiedene Szenarien wird es in AnW verschiedene Erfolgsindikatoren:
Bsp. Gewinn, aktueller Kontostand, Anzahl Erfolge, gesammelte Stücke .....

Je nachdem kann es auch noch andere Indikatoren geben, die den "Game State"/Zustand eindeutig definieren. (e.g. Anzahl Fehlversuche/Misserfolge, Abstand vom Startpunkt)

→ 1-2 vllt. 3 weitere Achsen

Ein Eintrag im DP-Table beschreibt (meist) die

Wahrscheinlichkeit für den Zustand der an dieser Stelle

"Game State"

durch die Indikatoren an den Achsen definiert wird.
(der Zustand muss eindeutig sein.)

Bsp. DP[i][j] = "W'keit das ich nach der i-ten Runde j-mal gewonnen habe".

Danach kommt die Kunst:

Wie berechne ich DP[i][j] von vorherigen Einträgen?
Meistens greifen wir auf die Einträge mit kleinerer Zeitkomponente zurück.
aber nicht immer

Dazu überlegt ihr euch wie/auf welchem Weg kann ich von der (i-1)-ten Runde, Tag, etc. diesen State DP[i][j] erreichen?

Ihr solltet einen Starting State (meist DP[0][0]) mit W'keit 1 haben.

Auslesen dann möglicherweise aus mehreren Einträgen.

Evt. müsst ihr die DP-Tabelle nur 1-mal berechnen (auch bei mehreren Testcases)